

# Algèbre linéaire 2

## 4.1 Déterminant d'une matrice

**Réf :** Grifone §4.1, 4.2, 4.6, 4.7

Francesco Costantino

Bâtiment 1R2 – bureau 222

[francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr](mailto:francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr)

# Rappel : matrices et changement de base

Pour  $E$  de dimensions  $n$  :

Endomorphisme  $\Phi: E \rightarrow E \xleftrightarrow[\text{de } E]{\text{choix de base}}$  matrice carrée  $\in M_{n,n}(K)$ .

Un seul endomorphisme peut être décrit par des matrices différentes :

- $\{e_i\}$  base de  $E \rightsquigarrow$  matrice  $M_{e_i}(\Phi)$  de vecteurs colonnes des  $\Phi(e_j)$  dans la base  $\{e_i\}$
- $\{e'_i\}$  base de  $E \rightsquigarrow$  matrice  $M_{e'_i}(\Phi)$  de vecteurs colonnes des  $\Phi(e'_j)$  dans la base  $\{e'_i\}$ .

Ces deux matrices sont liées par des matrices de passages :

$$M_{e'_i}(\Phi) = P_{e_i \rightarrow e'_i}^{-1} \cdot M_{e_i}(\Phi) \cdot P_{e_i \rightarrow e'_i}$$

où  $P_{e_i \rightarrow e'_i}$  est la matrice des vecteurs colonnes des  $e'_1, \dots, e'_n$  dans la base  $\{e_i\}$ .

# Plan

Mardi : propriétés du déterminant et une formule basée sur les permutations.

Jeudi : déterminant et volume.

## Déterminant – définition axiomatique

**Notation :**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n)$       où    $v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$ .

# Déterminant – définition axiomatique

**Notation :**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n)$  où  $v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$ .

## Theorème (Caractérisation du déterminant — Grifone Thm. 4.2)

Il existe **une et une seule** application  $\det: M_n(K) \longrightarrow K; (v_1, \dots, v_n) \longmapsto |v_1, \dots, v_n|$  qui satisfait les 3 conditions suivantes :

(D1) **linéaire** par rapport à chaque colonne :

$$|v_1, \dots, v_{j-1}, \lambda v_j + \mu w_j, v_{j+1}, \dots, v_n| = \lambda |v_1, \dots, v_j, \dots, v_n| + \mu |v_1, \dots, w_j, \dots, v_n|$$

(D2) **alternée** : elle s'annule si deux colonnes sont égales

$$|v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n| = 0.$$

(D3) **normalisation** :  $\det(I_n) = 1$ .

# Déterminant – définition axiomatique

**Notation :**  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n)$  où  $v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$ .

## Theorème (Caractérisation du déterminant — Grifone Thm. 4.2)

Il existe **une et une seule** application  $\det: M_n(K) \longrightarrow K; (v_1, \dots, v_n) \longmapsto |v_1, \dots, v_n|$  qui satisfait les 3 conditions suivantes :

(D1) **linéaire** par rapport à chaque colonne :

$$|v_1, \dots, v_{j-1}, \lambda v_j + \mu w_j, v_{j+1}, \dots, v_n| = \lambda |v_1, \dots, v_j, \dots, v_n| + \mu |v_1, \dots, w_j, \dots, v_n|$$

(D2) **alternée** : elle s'annule si deux colonnes sont égales

$$|v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n| = 0.$$

(D3) **normalisation** :  $\det(I_n) = 1$ .

## Définition

On appelle  $\det(A)$  le **déterminant** de la matrice  $A$ .

## Conséquences des axiomes D1 & D2

(1) Si  $A \in M_n(K)$  :  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$ .

## Conséquences des axiomes D1 & D2

(1) Si  $A \in M_n(K)$  :  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$ .

(2) Échanger deux colonnes  $\implies$  multiplication par  $-1$  :

$$|v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n| = -|v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n|.$$

(3) Pour tout  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  :

$$|v_1, v_2, \dots, v_n| = |v_1, v_2 + \lambda_2 \cdot v_1, \dots, v_n + \lambda_n \cdot v_1|.$$

$\implies$  on peut calculer le déterminant via le **pivot de Gauss** (appliqué aux colonnes).  
(Plus tard : également par le pivot de Gauss appliqué aux lignes.)



## Conséquences des axiomes D1 & D2

(1) Si  $A \in M_n(K)$  :  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$ .

(2) Échanger deux colonnes  $\implies$  multiplication par  $-1$  :

$$|v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n| = -|v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n|.$$

(3) Pour tout  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  :

$$|v_1, v_2, \dots, v_n| = |v_1, v_2 + \lambda_2 \cdot v_1, \dots, v_n + \lambda_n \cdot v_1|.$$

$\implies$  on peut calculer le déterminant via le **pivot de Gauss** (appliqué aux colonnes).  
(Plus tard : également par le pivot de Gauss appliqué aux lignes.)

(4)  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille liée dans  $K^n \implies |v_1, \dots, v_n| = 0$ .

(Plus tard : la réciproque est vraie aussi.)

## Conséquence de D1 & D2 – calcul par récurrence

### Proposition (Développement selon la colonne $j$ — Grifone Thm. 4.16)

Soit  $A \in M_n(K)$  et  $1 \leq j \leq n$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , notons :

- $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$  = la matrice obtenue de  $A$  en supprimant la ligne  $i$  et colonne  $j$ .

Alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}).$$

Le scalaire  $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  est appelé le **cofacteur** de  $a_{ij}$ .

# Multiplicativité

## Theorème (Grifone Thm. 4.18)

Pour  $A, B \in M_n(K)$  :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

# Multiplicativité

## Theorème (Grifone Thm. 4.18)

Pour  $A, B \in M_n(K)$  :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

## Corollaire (Grifone Cor. 4.19)

Les propositions suivantes sont équivalentes pour une matrice  $A \in M_n(K)$  :

- (a)  $A$  est inversible.
- (b) les colonnes de  $A$  forment une famille libre de vecteurs dans  $K^n$ .
- (c)  $\det(A) \neq 0$ .

Dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

# Matrices semblables

## Définition

Deux matrices  $A, A' \in M_n(K)$  sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible  $P \in M_n(K)$  telle que

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

**Exemple :**  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont semblables :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Corollaire

Si  $A, A' \in M_n(K)$  sont semblables, alors  $\det(A) = \det(A')$ .

# Déterminant d'un endomorphisme

## Proposition (Grifone Cor. 3.27)

Soit  $\Phi: E \rightarrow E$  un endomorphisme et soient  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $(e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . Alors les matrices  $M(\Phi)_{e_i}$  et  $M(\Phi)_{e'_i}$  sont semblables.

# Déterminant d'un endomorphisme

## Proposition (Grifone Cor. 3.27)

Soit  $\Phi: E \rightarrow E$  un endomorphisme et soient  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $(e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . Alors les matrices  $M(\Phi)_{e_i}$  et  $M(\Phi)_{e'_i}$  sont semblables.

## Définition

Soit  $\Phi: E \rightarrow E$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

Le **déterminant de  $\Phi$**  est le déterminant de sa matrice dans une base  $(e_i)$  :

$$\det(\Phi) = \det(M(\Phi)_{e_i}).$$

Cela ne dépend pas du choix de base.

**Attention** : le déterminant d'une application linéaire  $\Psi: E \rightarrow F$  n'a pas de sens si  $E \neq F$ .

# Permutations

## Définition

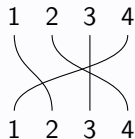
On appelle **permutation** de  $\{1, \dots, n\}$  une application bijective

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

On note  $\Sigma_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ .

(1) On peut noter une permutation comme  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ .

Exemple :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  :





# Permutations

## Définition

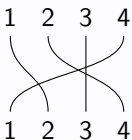
On appelle **permutation** de  $\{1, \dots, n\}$  une application bijective

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

On note  $\Sigma_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ .

(1) On peut noter une permutation comme  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ .

Exemple :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} :$



(2) La **composition** de deux permutations est une permutation, qu'on note simplement par  $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ .

(3) Toute permutation admet une inverse  $\sigma^{-1}$ .

# Cycles et transpositions

## Définition (Cycles)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tous **distincts**. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in \Sigma_n$  la permutation :

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \dots \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1 \quad \text{et} \quad \forall b \notin \{a_1, \dots, a_k\} : b \mapsto b.$$

Cas spéciaux :  $(a)$  est simplement l'identité, et  $(ab)$  est appelée une **transposition**.

# Cycles et transpositions

## Définition (Cycles)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tous **distincts**. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in \Sigma_n$  la permutation :

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \dots \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1 \quad \text{et} \quad \forall b \notin \{a_1, \dots, a_k\} : b \mapsto b.$$

Cas spéciaux :  $(a)$  est simplement l'identité, et  $(ab)$  est appelée une **transposition**.

(1) Le cycle  $(a_1 \dots a_k)$  dépend de l'ordre **cyclique** de  $a_1, \dots, a_k$  :

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1}) \quad \text{mais} \quad (123) \neq (132)$$

# Cycles et transpositions

## Définition (Cycles)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tous **distincts**. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in \Sigma_n$  la permutation :

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \dots \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1 \quad \text{et} \quad \forall b \notin \{a_1, \dots, a_k\} : b \mapsto b.$$

Cas spéciaux :  $(a)$  est simplement l'identité, et  $(ab)$  est appelée une **transposition**.

(1) Le cycle  $(a_1 \dots a_k)$  dépend de l'ordre **cyclique** de  $a_1, \dots, a_k$  :

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1}) \quad \text{mais} \quad (123) \neq (132)$$

(2) On calcule une composition de cycles en lisant de droite à gauche. Exemple dans  $\Sigma_4$  :

$$(124)(23)(134) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Cycles et transpositions

## Définition (Cycles)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tous **distincts**. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in \Sigma_n$  la permutation :

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \dots \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1 \quad \text{et} \quad \forall b \notin \{a_1, \dots, a_k\} : b \mapsto b.$$

Cas spéciaux :  $(a)$  est simplement l'identité, et  $(ab)$  est appelée une **transposition**.

(1) Le cycle  $(a_1 \dots a_k)$  dépend de l'ordre **cyclique** de  $a_1, \dots, a_k$  :

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1}) \quad \text{mais} \quad (123) \neq (132)$$

(2) On calcule une composition de cycles en lisant de droite à gauche. Exemple dans  $\Sigma_4$  :

$$(124)(23)(134) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Toute permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  est canoniquement le produit de cycles disjoints :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} =$$

# Cycles et transpositions

## Définition (Cycles)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tous **distincts**. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in \Sigma_n$  la permutation :

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \dots \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1 \quad \text{et} \quad \forall b \notin \{a_1, \dots, a_k\} : b \mapsto b.$$

Cas spéciaux :  $(a)$  est simplement l'identité, et  $(ab)$  est appelée une **transposition**.

(1) Le cycle  $(a_1 \dots a_k)$  dépend de l'ordre **cyclique** de  $a_1, \dots, a_k$  :

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1}) \quad \text{mais} \quad (123) \neq (132)$$

(2) On calcule une composition de cycles en lisant de droite à gauche. Exemple dans  $\Sigma_4$  :

$$(124)(23)(134) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Toute permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  est canoniquement le produit de cycles disjoints :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (156)$$

# Cycles et transpositions

## Définition (Cycles)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tous **distincts**. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k) \in \Sigma_n$  la permutation :

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \dots \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1 \quad \text{et} \quad \forall b \notin \{a_1, \dots, a_k\} : b \mapsto b.$$

Cas spéciaux :  $(a)$  est simplement l'identité, et  $(ab)$  est appelée une **transposition**.

(1) Le cycle  $(a_1 \dots a_k)$  dépend de l'ordre **cyclique** de  $a_1, \dots, a_k$  :

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_k a_1 a_2 \dots a_{k-1}) \quad \text{mais} \quad (123) \neq (132)$$

(2) On calcule une composition de cycles en lisant de droite à gauche. Exemple dans  $\Sigma_4$  :

$$(124)(23)(134) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Toute permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  est canoniquement le produit de cycles disjoints :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 2 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (156)(24)(38)(7)$$

# Signature d'une permutation

## Proposition

Toute permutation est un produit de transpositions.



# Signature d'une permutation

## Proposition

Toute permutation est un produit de transpositions.

## Proposition

Soit  $\sigma \in \Sigma_n$  une permutation et  $c(\sigma)$  son nombre de cycles disjoints (les cycles triviaux ( $a$ ) inclus).

- (1)  $\sigma$  est le produit d'un nombre pair de transpositions  $\implies n - c(\sigma)$  est pair.
- (2)  $\sigma$  est le produit d'un nombre impair de transpositions  $\implies n - c(\sigma)$  est impair.

# Signature d'une permutation

## Proposition

Toute permutation est un produit de transpositions.

## Proposition

Soit  $\sigma \in \Sigma_n$  une permutation et  $c(\sigma)$  son nombre de cycles disjoints (les cycles triviaux ( $a$ ) inclus).

- (1)  $\sigma$  est le produit d'un nombre pair de transpositions  $\implies n - c(\sigma)$  est pair.
- (2)  $\sigma$  est le produit d'un nombre impair de transpositions  $\implies n - c(\sigma)$  est impair.

## Corollaire

Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . Alors une parmi les deux propositions suivantes est vraie pour toute décomposition de  $\sigma$  en transpositions :

- (1) le nombre de transpositions est pair.
- (2) le nombre de transpositions est impair.

# Signature d'une permutation

## Définition

La **signature**  $\epsilon(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$  est :

- $+1$  si  $\sigma$  est produit d'un nombre pair de transpositions.
- $-1$  si  $\sigma$  est produit d'un nombre impair de transpositions.

## Propriétés :

- (1)  $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma) \cdot \epsilon(\tau)$  et  $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$ .
- (2) Pour un cycle  $(a_1 \dots a_k)$  de longueur  $k$ ,  $\epsilon(a_1 \dots a_k) = (-1)^{k-1}$ .

# Retour au déterminant

## Theorème (Formule explicite pour le déterminant)

Considérons l'application  $\det: M_n(K) \longrightarrow K$  donnée par

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Cette application satisfait les conditions D1–D3 du théorème.

De plus, elle est la seule application qui satisfait les conditions D1–D3.

### Exemples :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

## Retour au déterminant

### Proposition

Pour toute  $A \in M_n(K)$  :  $\det(A^T) = \det(A)$ .

**Raison :** pour toute  $\sigma \in \Sigma_n$ , réordonner les facteurs donne

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)} \cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

## Retour au déterminant

### Proposition

Pour toute  $A \in M_n(K)$  :  $\det(A^T) = \det(A)$ .

**Raison :** pour toute  $\sigma \in \Sigma_n$ , réordonner les facteurs donne

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)} \cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

### Corollaire

Toutes les propriétés des déterminants relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.